**Розв’язок першого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 10 хвилин - 6 балів**

**1.1 .** Решите уравнение: .

**Решение:** Так как левая часть уравнения принимает только положительные значения, то x > 4. Так как на (4; +∞) функция  возрастает, а функция  убывает, то уравнение  имеет не более одного корня. При этом , то есть *x* = 5 – корень данного уравнения.

**Ответ: х=5.**

**Розв’язок другого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 15 хвилин - 8 балів**

**2.1**. Найдите значение выражения .

**Решение:** Пусть 2011 = *а*, тогда  =  =  =  =  =  = . Таким образом, значение данного выражения равно 2012.

**Ответ:** 2012

**Розв’язок першого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 10 хвилин - 6 балів**

**1.2.** 16 карточек занумеровали от числами 1 до 16. Можно ли их выложить вдоль одной прямой так, чтобы сумма номеров на любых двух соседних карточках была точным квадратом? Если можно – покажите на примере.

**Решение**

Пример:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | 9 | 7 | 2 | 14 | 11 | 5 | 4 | 12 | 13 | 3 | 6 | 10 | 15 | 1 | 8 |

Отметим, что приведенная расстановка единственна (с точностью до симметрии). Действительно, число 16 может стоять только с краю, так как среди оставшихся чисел нет двух таких, которые в сумме с 16 дают квадраты.

После этого часть таблицы восстанавливается однозначно (до числа 3):

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 16 | 9 | 7 | 2 | 14 | 11 | 5 | 4 | 12 | 13 | 3 |

Для следующей клетки возможны два варианта: 1 или 6, но первый вариант до конца не доводится.

Заметим также, что в приведенном примере самая «популярная» сумма двух соседей – 16, которая встречается 7 раз.

**Ответ:** да, можно

**Розв’язок другого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 15 хвилин - 8 балів**

**2.2.** Докажите неравенство: .

**Решение:** Заметим, что выполняются следующие числовые неравенства: ; ; ...; ; . Кроме того, для любых натуральных *k* выполняется равенство . Таким образом,  <  =  =  = , что и требовалось доказать.

**Розв’язок першого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 10 хвилин - 6 балів**

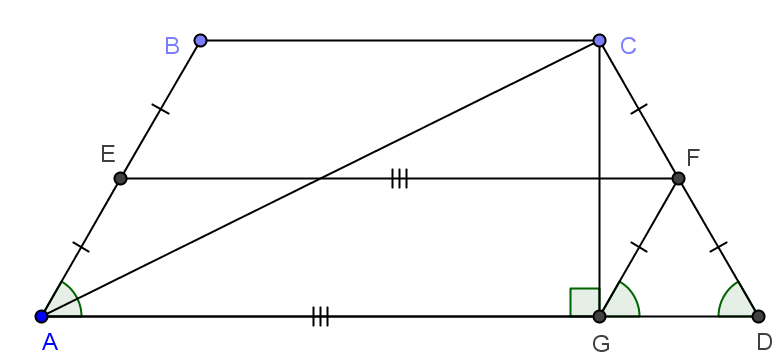
**1.3** Найдите среднюю линию равнобокой трапеции, если ее диагональ равна 25 см, а высота равна 15 см.

**Решение:** Пусть *АВСD* – данная трапеция (*AD* || *BC*), *ЕF* – ее средняя линия, *CG* – высота (см. рис. 3). Докажем, что *ЕF* = *AG*. Это можно сделать различными способами. Первый способ. Так как *CF* – медиана прямоугольного треугольника *CGD*, то *FG = CD* = *FD.* Учитывая также, что *АВ* = *CD*, получим:

, значит, *AE* || *FG*. Кроме того, *EF* || *AG*. Таким образом, *АEFG –* параллелограмм *(*по определению), следовательно, *ЕF* = *AG*.

Второй способ. Пусть *AD* = *а*, *BC* = *b*, тогда,  (так как *АВ* = *CD*). Значит, .

Далее, из треугольника *CGD* по теореме Пифагора находим *AG*:  = 10⋅40 = 202. Таким образом, *EF* = *AG* = 20.



* **Ответ**: 20 см

**Розв’язок другого туру «Математичної регати»**

**10-11 класи**

**Кожне завдання – 15 хвилин - 8 балів**

**2.3** В треугольнике *АВС* проведена биссектриса *АL*. Через точку *L* проведена прямая, перпендикулярная *AL* и пересекающая лучи *АВ* и *АС* в точках *М* и *K* соответственно. Найдите *AK*, если *АВ* = 4, *АС* = 6.

**Решение:**

Так как отрезок *AL* является высотой и биссектрисой треугольника *AMK* (см. рис. 2 а, б), то этот треугольник – равнобедренный (*АМ* = *AK*). Кроме того, из треугольника *АВС* (по свойству биссектрисы): . Далее можно рассуждать по-разному.



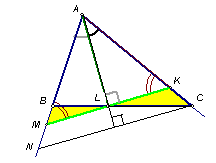


Рис. 2а

Рис. 2б

Первый способ. Через точку *С* проведем прямую, параллельную *KM*, *N* – точка ее пересечения с лучом *АВ* (см. рис. 2а). По теореме о пропорциональных отрезках . Пусть *ВМ =* 2x; *MN* = 3*x*, тогда, учитывая, что *AN = AC*, получим: *АВ* + 5*x* = *АС*. Следовательно, *x* = 0,4; *ВМ =* 0,8; *АK* = *АМ* = 4,8.

Второй способ. Пусть ∠*BLM* = ∠*CLK = α*, ∠*AMK* = ∠*AKM* = *β* (см. рис. 2б). Применим теорему синусов к треугольникам *BLM* и *KLC*. Соответственно получим:  и . Так как sin(180° – *β*) = sin*β*, то . Пусть *АK* = *АМ* = *y*, тогда  ⇔ *y* = 4,8.

**Ответ: 4,8**